

高レジリエント構造のための超ロバスト最適設計法の開発

Development of super-robust optimization methodology for designing high-resilient structures

東京大学 数理・情報教育研究センター 教授 寒野 善博

(研究計画ないし研究手法の概略)

はじめに

構造物の最適設計法（構造最適化）は、一言で言えば、設計要件が与えられた際に最大の性能をもつ設計解を見出す方法論である。最適設計問題の求解には、数理最適化における諸手法の他に、構造最適化の分野で独自に用いられてきた解法が用いられることも多い。最適設計問題は、通常は、構造物の応答量に関するさまざまな制約条件の下で、構造物の質量などを目的関数として最適化する問題として、定式化される（または、構造物の質量の上限値の制約の下で、応答量の大きさなどを最小化する問題としても、定式化される）。この際に、設計領域や荷重、材料定数などは、通常は問題の入力として与えられる。

一方で、実世界の構造物には、さまざまな荷重が作用し得る。また、構造物そのものにも、施工誤差や材料強度のばらつき、経年劣化など、不確実な要因が存在する。このため、最適設計問題の入力データの不確かさを考慮しながら最適化を行うことは、高性能な構造物を設計するためには極めて重要である。

最適設計法における不確かさの取り扱い方としては、大別して、確率論的なモデルと非確率論的なモデルの2つがある。確率論的なモデルでは、不確かなパラメータは、ある確率分布に従うと仮定する。このとき構造物の応答量は確率変数とみなせるが、その応答量が制約条件を満たす確率を信頼性とよぶ。そして、この信頼性の下限値を制約条件とする最適設計法を、通常、信頼性最適設計とよぶ。一方、非確率論的なモデルでは、不確かなパラメータはある集合に含まれる任意の値をとり得ると仮定する。この集合を不確実性集合とよぶが、不確実性集合のうちで最悪値に対しても制約条件を満たすという要求の下で最適化を行うことが考えられる。この方法論を、多くの場合、ロバスト最適設計とよぶ。このように、信頼性最適設計では確率分布が仮定（設定）され、ロバスト最適設計では不確実性集合が仮定（設定）される。

それでは、不確かさを表す確率分布や不確実性集合は、そもそも適切に仮定（設定）できるのだろうか。不確かさのモデルそのものの設定にも、むしろ、不確かさが伴い得ると考えるのが妥当ではないか。この研究課題は、このような問題意識から、着想に至ったものである。

研究計画の概略

前述の問題意識を受けて、この研究課題では、最適設計における不確かさの設定に対するメタモデルを考える。その一つのモデルとして、信頼性最適設計において、入力である確率分布が不確かであると想定する。より具体的には、たとえば正規分布を仮定したとき、その期待値と分散とがある与えられた集合の中をばらつく（その集合に含まれる任意の値をとり得る）と考える。そして、期待値と分散の最悪値に対して、構造物の信頼性が下限値以上であるという制約を考える。つまり、期待値と分散に対して、非確率論的な不確実性モデルを

考えるわけである．同様に，不確かなパラメータが多変量正規分布に従う場合には，期待値ベクトルと分散共分散行列とがある与えられた集合の中をばらつく，と考える．このように，確率分布のモーメント（積率）に対して，非確率論的な不確実性モデルを与える．

信頼性最適設計において，入力となる確率分布の不確かさを扱う手法の研究は，近年，注目を集めてきている．たとえば，文献 [CCG+16] では，入力分布の型とパラメータがある確率分布に従うことを仮定している．このとき，設計解の信頼性は確率変数となるため，信頼性制約も確率論的な意味で解釈する必要がある．すなわち，信頼性制約が満たされる確率に対して下限値（これを，確信度とよぶ）を設けるという制約を考えるわけである．同様の定式化は，文献 [JCL19] や文献 [WHY+20] でも用いられている．文献 [IKK18] では，それぞれの確率変数が従う正規分布の期待値と分散を確率変数とみなし，確信度付き信頼性最適設計を通常信頼性最適設計の形式に変換する手法を提案している．これらの研究は，信頼性最適設計の枠組みにおける入力分布が，必ずしも精度よく得られるとは限らない，という問題意識に立脚している．たとえば，不確実なパラメータのデータ数が十分に多く得られない場合，そのデータからパラメータが従う確率分布を推定しようとしても精度がよくはできない．また，これらの手法は，信頼性制約が満たされる確率の下限値を指定していることから，いわば信頼性の信頼性を扱っている，とみることできる．これに対して，この研究課題で扱うモデルは，信頼性の最悪値に対して下限値を指定していることから，いわば信頼性のロバスト性を扱っているとみることができる．

この研究課題では，確率分布のモーメントの非確率論的な不確かさを扱うために，金融工学における value-at-risk の最悪値に関する研究 [EOO03] を参考にする．そして，信頼性に関するロバスト制約を，最適化の枠組みで扱いやすい形式に変換することを主な目標とする．同時に，このような最適化問題に通常解法を適用すると計算コストが大きいことが多いため，最適設計問題の特徴を生かして小さい計算コストで求解できる解法を開発することも重要である．この研究課題では，そのための萌芽的な課題として，コンプライアンス最小化問題とよばれる基本的な最適設計問題に焦点をしばって高速な解法を開発する．

（実験調査によって得られた新しい知見）

「研究計画の概略」の項にあるように，確率分布のモーメントが非確率論的な不確かさに従うときに，信頼性の最悪値が下限値（目標値）以上になるという制約条件について考察した．信頼性最適設計の分野では，近年，不確実性を，偶然的な不確実性と認識的な不確実性に分類して論じることが多い．偶然的な不確実性は，物理量などが自然にもっている不確かさであり，したがってこれを取り除くことはできないとされる．一方，認識的な不確実性は，たとえば計測精度の不足や物理現象の過度の単純化によって生じる不確かさである．この文脈において，提案しているモデルは，偶然的な不確実性は確率分布によって表現し，認識的な不確実性はモーメントの不確かさによって表現していると，解釈することもできる．

次に，上記の制約条件について，技術的な側面からも考察した．まず，入力分布として多変量正規分布を考え，その期待値ベクトルと分散共分散行列が属する不確実性集合を定義した．いずれに対しても，L1 ノルムを用いたものと L2 ノルムを用いたものの，2 種類の不確実性集合を定めた．このような不確実性集合は，不確かさを含む構造系の解析でしばしば用いられるいわゆる「凸モデル」の 1 つとみなすことができる．このようなモデルに対して，文献 [EOO03] の手法を参考に，上記の制約条件を最適化において扱いやすい形式に変換す

ることを試みた。というのも、信頼性の最悪値が下限値以下であるという制約条件は（モーメントがとり得る値が無数あるため）無数の信頼性制約とみなせ、極めて扱いづらいからである。この研究課題では、正規分布の標準化、ミニマックス定理、半正定値計画の双対性などを用いることにより、上記の制約条件を、有限個で確率変数を含まない制約条件に帰着できることを明らかにした。ここで新たに導かれた制約条件は、非線形半正定値計画の枠組みで扱えるため、元の無数の信頼性制約という条件に比べると非常に扱いやすい形式である。この研究課題では、最適化問題を逐次的に半正定値計画に近似するという考え方に基き、信頼性の最悪値制約付き最適設計問題に対する解法を提案した。そして、この解法を実装し、数値実験により有効性を検証した。特に、得られた解に対して二重のモンテカルロ法を適用することで、実際に信頼性の最悪値制約を満たす解が得られていることを実証した。

以上の新しい知見は、「発表論文」の項の原著論文 [K22] および口頭発表 [K21] としてまとめた。

さらに、上記の問題を効率よく解く解法を考えるための萌芽的な研究として、トポロジー最適化とよばれる最適設計問題に対して、高速な解法を開発した。ここでの提案手法は、データ科学の分野で大きな注目を集めている加速勾配法とよばれる最適化手法に分類される。特に、提案手法は、最急降下方向への移動と実行可能領域への射影を繰り返す射影勾配法とよばれる手法の加速版である。ここで、解法の各反復の計算コストを小さくするため、実行可能領域への射影の計算法を開発した。また、最適化の効率を左右するステップ幅の決め方について、新たな提案を行った。この手法を実装し、数値実験を行うことで、トポロジー最適化の既存の複数の解法よりも多くの場合に高速かつ安定的に解を得られることを示した。この提案手法を契機として、さらに複雑な最適設計問題に対する高速な解法を開発できる可能性がある。

以上の新しい知見は、「発表論文」の項の [NK21] としてまとめた。

以上のように、「研究計画の概略」で述べた課題のそれぞれに対して、一定の研究成果をあげた。

（文献）

[CCG+16] H. Cho, K. K. Choi, N. J. Gaul, I. Lee, D. Lamb, D. Gorsich: Conservative reliability-based design optimization method with insufficient input data. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **54**, pp. 1609–1630 (2016).

[EOO03] L. El Ghaoui, M. Oks, F. Oustry: Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: a conic programming approach. *Operations Research*, **51**, 543–556 (2003).

[IKK18] M. Ito, N. H. Kim, N. Kogiso: Conservative reliability index for epistemic uncertainty in reliability-based design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **57**, pp. 1919–1935 (2018).

[JCL19] Y. Jung, H. Cho, I. Lee: Reliability measure approach for confidence-based design optimization under insufficient input data. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **60**, pp. 1967–1982 (2019).

[WHY+20] Y. Wang, P. Hao, H. Yang, B. Wang, Q. Gao: A confidence-based reliability optimization with single loop strategy and second-order reliability method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **372**, 113436 (2020).

(発 表 論 文)

[K21] 寒野 善博：期待値と分散が不確かな正規分布に対する信頼性制約について．日本機械学会 第 31 回設計工学・システム部門講演会 (2021).

[K22] Y. Kanno: Structural reliability under uncertainty in moments: distributionally-robust reliability-based design optimization. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **39**, pp. 195–226 (2022). DOI: 10.1007/s13160-021-00483-x

[NK21] A. Nishioka, Y. Kanno: Accelerated projected gradient method with adaptive step size for compliance minimization problem. *JSIAM Letters*, **13**, pp. 33–36 (2021). DOI: 10.14495/jsiaml.13.33